

## **Лекция 4**

**Сдвиг. Напряжения и деформации при сдвиге.**

**Закон Гука при сдвиге. Чистый сдвиг.**

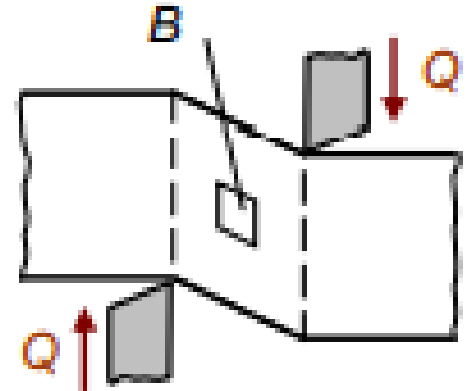
**Расчет на прочность**

**Смятие**

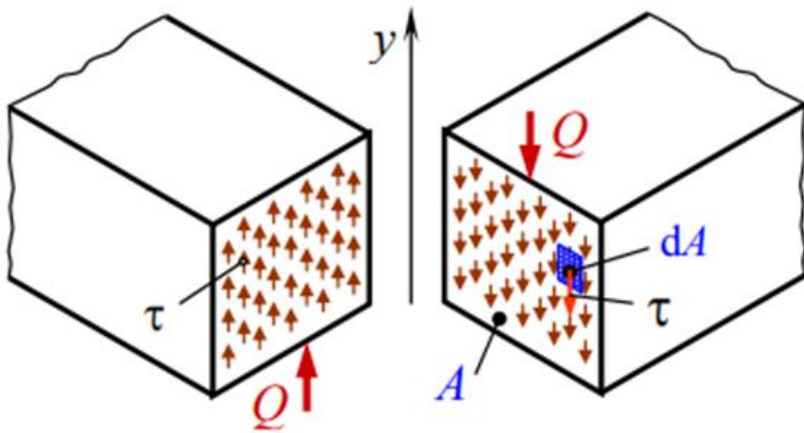
# СДВИГ

**Сдвиг** – простой вид деформации, характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.

При сдвиге в поперечном сечении из шести внутренних усилий действует только поперечная сила  $Q$



## 1. Статическая сторона задачи – условие равновесия



$$\sum y = 0; \quad Q = \int_A \tau \cdot dA$$

В действительности, касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно.

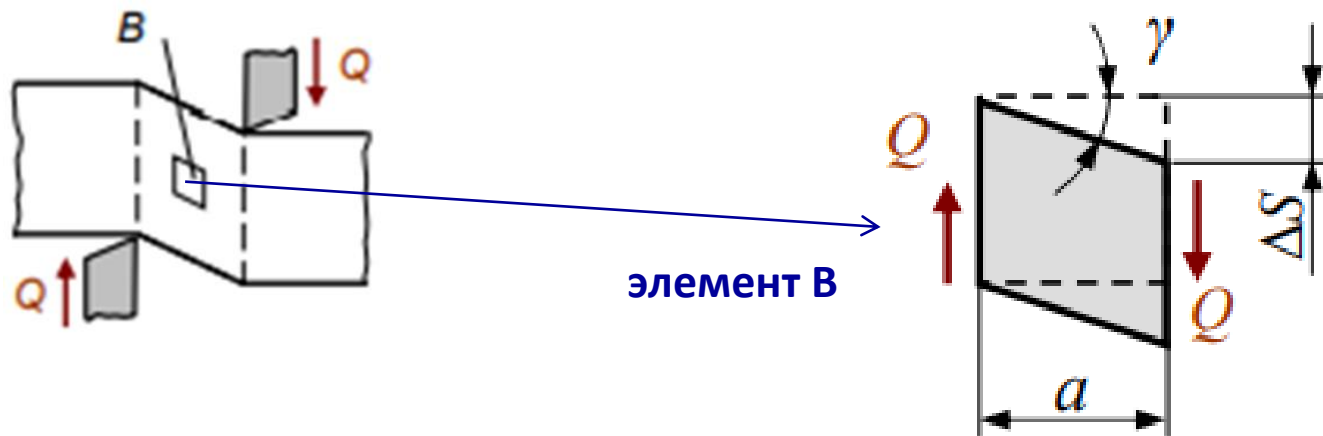
Однако, если принять допущение о равномерном распределении напряжений, которое широко используется на практике, то

$$Q = \tau \cdot A$$

откуда

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

## 2. Геометрическая (деформационная) сторона задачи



$$\text{Угол сдвига} - \gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}$$

$\Delta S$  - абсолютный сдвиг

$\gamma$  - относительный сдвиг, угловая деформация

## 3. Физическая сторона задачи

В области упругих деформаций справедлив закон Гука

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Закон Гука при растяжении (сжатии)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

#### 4. Математическая сторона задачи

Подставляя  $\tau = \frac{Q}{A}$  и  $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}$  в  $\tau = G \cdot \gamma$

получим закон Гука для сдвига

$$\frac{Q}{A} = G \frac{\Delta S}{a}$$

откуда

$$\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}$$

$G \cdot A$  – жесткость сечения при сдвиге

$G$  – модуль сдвига (модуль касательной упругости, модуль упругости второго рода)

Для стали в расчетах принимают  $G = 80 \text{ ГПа} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

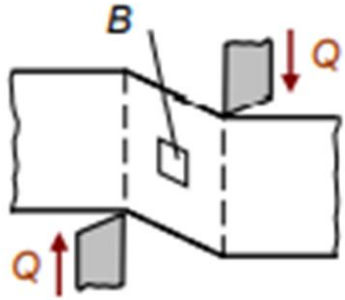
**Связь между упругими постоянными**

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$E$  – модуль упругости первого рода

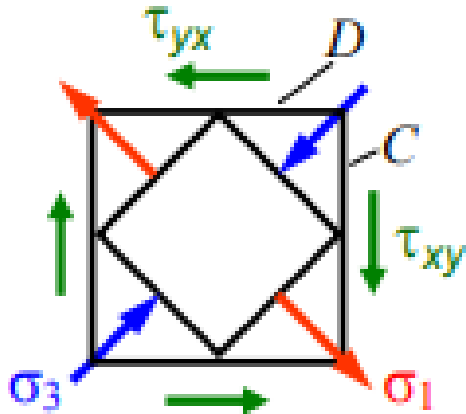
$\mu$  – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ



По граням выделенного элемента  $B$  действуют только касательные напряжения  $\tau$ , нормальные напряжения

$$\sigma_y = 0, \sigma_x = 0$$



$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_{\max} = \tau_{xy} = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_{\min} = -\tau_{xy} = \sigma_3$$

получаем: главные площадки ориентированы под углом  $45^\circ$  к направлению сдвигающих напряжений, величины главных нормальных напряжений равны касательным напряжениям.

Имеет место **чистый сдвиг** – частный случай плоского напряженного состояния, при котором по граням элемента действуют только касательные напряжения.

# РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

1. Эквивалентные напряжения по I гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ,I}} = \sigma_1 \leq [\sigma], \text{ но } \sigma_1 = \tau, \text{ следовательно } [\tau] = [\sigma].$$

Соотношение справедливо для хрупких материалов.

2. Эквивалентные напряжения по III гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ,III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \text{ но } \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau. \text{ Тогда } 2[\tau] \leq [\sigma], \text{ откуда } [\tau] = 0,5[\sigma]$$

3. Эквивалентные напряжения по IV гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ,IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставив  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$  и  $\sigma_3 = -\tau$ , получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ,IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma],$$

$$\text{откуда } [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0,577[\sigma].$$

Таким образом, при расчете деталей из пластичных материалов, работающих на срез (болты, заклепки, шпонки...) условие прочности может быть записано так:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau], \text{ где } [\tau] = (0,5 - 0,6)[\sigma]$$

# СМЯТИЕ

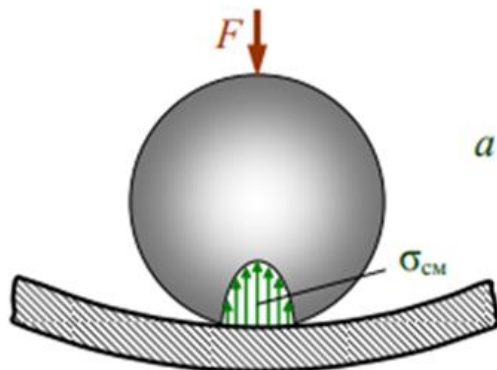
**Смятие** – вид местной пластической деформации, возникающей при сжатии твердых тел, в местах их контакта.

Смятие материала начинается в случае, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала. Размеры смятого слоя зависят от величины, характера и времени воздействия нагрузки, а также от температуры нагрева сжимаемых тел.

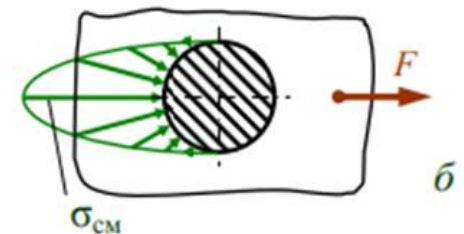
Смятие наблюдается не только у пластичных, но и у хрупких материалов (закаленная сталь, чугун и др.).

Смятие возникает в соединениях (болтовых, заклепочных, шпоночных и др.), в местах опирания конструкций и в зонах контакта сжатых элементов.

Величину напряжений смятия в конструкциях обычно ограничивают допусковым напряжением смятия, которое определяется характером соприкасающихся поверхностей, свойствами используемого материала и его ориентацией относительно действующих нагрузок (например, в случае древесины – вдоль или поперек волокон).



Характер распределения напряжений  
в зоне контакта  
шарика с кольцом (а)  
и листа с заклепкой (б)



## Пример

Подобрать диаметр заклепок, соединяющих накладку с листом; проверить прочность заклепок на смятие и листов на разрыв. Материал листов и заклепок – прокат из стали Ст3.

$$F = 8 \text{ кН}; \quad t_1 = 5 \text{ мм}; \quad t_2 = 3 \text{ мм}; \quad b = 50 \text{ мм}; \quad \sigma_T = 235 \text{ МПа}.$$

### 1. Определение диаметра заклепок

Допускаемые напряжения, рассчитанные на основе механической характеристики – предела текучести и нормативного коэффициента запаса:

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [n_T] = 235 / 1,5 = 156,7 \text{ МПа} \approx 160 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{см}] = (2 \div 2,5)[\sigma_p] = (2 \div 2,5) \cdot 160 = (320 \div 400) \text{ МПа}.$$

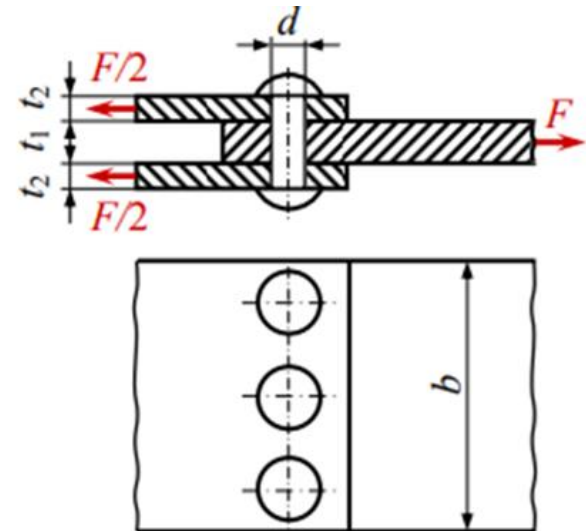
Допускаемые напряжения согласно рекомендациям (См. таблицу ниже)

$$[\sigma_p] = 125 \text{ МПа}; \quad [\tau_{ср}] = 75 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{см}] = 190 \text{ МПа}.$$

Из двух значений допускаемого напряжения на срез (96 и 75 МПа) принимаем меньшие значения допускаемого напряжения  $[\tau_{ср}] = 75 \text{ МПа}$ . Из условия прочности при срезе

$$\tau = \frac{Q}{A_{ср}} \leq [\tau],$$

определяем требуемую площадь поперечного сечения заклепок.





**Допускаемые напряжения при статической нагрузке  
для углеродистых сталей обыкновенного качества в горячекатаном  
состоянии \***

Марка стали	Допускаемые напряжения, МПа				
	при растя- жении [ $\sigma_p$ ]	при изгибе [ $\sigma_{из}$ ]	при круче- нии [ $\tau_{кр}$ ]	при срезе [ $\tau_{ср}$ ]	при смятии [ $\sigma_{см}$ ]
Ст2	115	140	85	70	175
Ст3	125	150	95	75	190
Ст4	140	170	105	85	210
Ст5	165	200	125	100	250
Ст6	195	230	145	115	290

Стержень заклепки подвергается перерезыванию в двух плоскостях; средняя часть заклепки сдвигается вправо.

Суммарная площадь среза

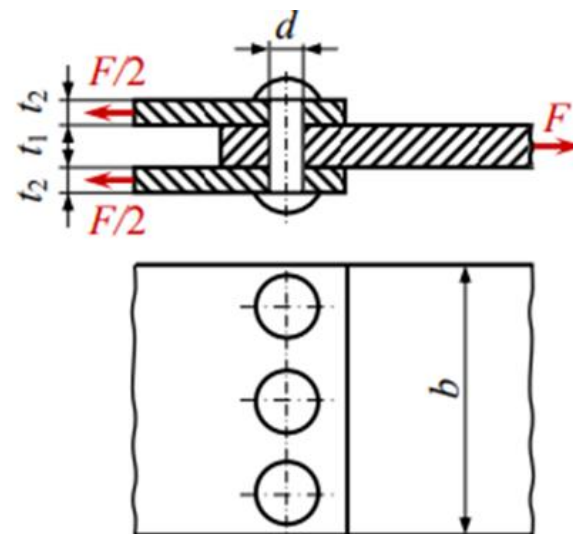
$$A_{\text{ср}} \geq \frac{Q}{[\tau]} = \frac{\pi d^2}{4} m \cdot n, \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi \cdot m \cdot n \cdot [\tau]}}$$

где  $m = 2$  – количество плоскостей среза заклепки;

$n = 3$  – количество заклепок.

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 8000}{\pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 0,00476 \text{ м.}$$

Принимаем  $d = 5 \text{ мм}$



## 2. Проверка заклепок на смятие

Давление, передающееся на поверхность заклепки от листа, распределяется неравномерно, по сложной зависимости, изменяясь от нуля до значительных величин. На практике, чтобы вычислить условное напряжение смятия необходимо разделить силу, приходящуюся на заклепку, на площадь диаметрального сечения. Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которой служит диаметр заклепки, другая сторона равна толщине листа, передающего давление на стержень заклепки. Так как толщина среднего листа меньше суммы толщин обеих накладок, то в худших (наиболее опасных) условиях по смятию будет именно средняя часть заклепки.

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

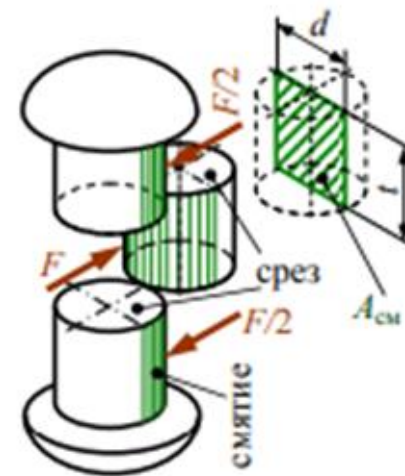
где

$$A_{\text{см}} = d \cdot t_1 \cdot n = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{8000}{75} = 106,7 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 106,7 \text{ МПа}.$$

**Прочность на смятие обеспечена**



Поверхности среза и смятия  
в заклепочном соединении

### 3. Проверка прочности листа на разрыв

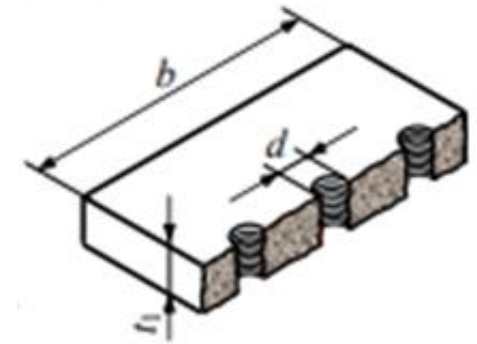
Опасным считается сечением листа, проходящее через заклепочные отверстия; здесь рабочая ширина листа является наименьшей.

Площадь сечения листа, ослабленного заклепочными отверстиями (площадь «живого» сечения)

$$A_{\text{разр}} = b \cdot t_1 - n \cdot d \cdot t_1 = t_1(b - n \cdot d) = 5(50 - 3 \cdot 5) = 175 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{\text{разр}} = \frac{8000}{175} = 45,7 \text{ МПа}, \text{ что меньше допускаемого}$$
$$[\sigma] = 125 \text{ МПа}.$$

Из условия прочности на сдвиг подобран диаметр двухсрезных заклепок.  
Условия прочности на смятие заклепок и разрыва листа выполняются.



Определение площади «живого» сечения листа